

# 二次型

## 基本概念

- 定义
  - n 阶的二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  是 n 个变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的一个齐二次多项式函数
- 类型
  - 实二次型
    - 二次型的系数都是实数
    - 考研的要求限于实二次型
  - 标准二次型
    - 交叉项的系数都为 0 的二次型，也就是矩阵为对角矩阵的二次型
  - 规范二次型
    - 形如  $\lambda x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$  的二次型
    - 矩阵是规范对角矩阵
    - 由阶数 n 和 p, q 决定 (p, q 即为正负惯性指数)
- 二次型的矩阵 A 是一个对称矩阵，它和二次型是互相决定的
  - $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X, X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$
- 标准二次型：矩阵是对角矩阵的二次型
- 可逆线性变量替换：设 C 的 n 阶可逆矩阵，作变换  $X = CY$ 
  - 把  $X^T A X$  变为  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  的二次型  $Y^T C^T A C$
- 实对称矩阵的合同
  - 存在 C 可逆，使得  $B = C^T A C$ ，则称 A 与 B 合同
  - 两个二次型可用可逆线性变量替换互相转化的充分必要条件是它们是矩阵合同

## 二次型的标准化

- 定义
    - 构造变换  $X = CY$ ，使得  $Y^T C^T A C Y$  是标准二次型
    - 用可逆线性变量替换把一个给定的二次型化为标准（规范）二次型
  - 任何二次型都可标准化和规范化，即任何实对称矩阵都合同于对角矩阵（规范对角矩阵）
    - 不同于相似对角化，二次型的标准化没有判断能不能的问题，只有方法问题
  - 方法
    - 正交变换法
    - 配方法
      - 本质上不是代数方法，是初等数学方法，但很好用
- 解题步骤详见参考书，都是套路，应熟练掌握

## 惯性指数

- 定义
  - 实对称矩阵 A 是正（负）惯性指数：合同于 A 的对角矩阵的对角线元素中，正（负）数的个数
- 实对称矩阵的合同判断
  - 惯性指数一样
- 与特征值的关系
  - 正（负）惯性指数即正（负）特征值的个数
  - 两个实对称矩阵合同的充分必要条件是它们的正（负）特征值的个数都相等

## 正定性

- 定义
  - 二次型正定
    - 当  $x_1, \dots, x_n$  不全为 0 时，一定有  $f(x_1, \dots, x_n) > 0$
  - 实对称矩阵正定
    - 当 n 维向量  $\eta \neq 0$  时，有  $\eta^T A \eta > 0$
- 矩阵正定的判断
  - A 正定
    - A 和单位矩阵合同
      - $A = C^T C, C$  可逆
    - 可用配方法求得
      - 子主题 1
    - A 的特征值都大于 0
    - ★ A 的顺序主子式都大于 0
      - 常用方法，不用求特征值，直接判断